

เฉลยชุดข้อสอบ : ฮาร์มอนิกอย่างง่าย ชุดที่ 2**ข้อที่ 1**

ตอบ $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\alpha\Delta\theta$
จากโจทย์ ได้

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}$$

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1 + \Delta\ell}{g}}$$

จาก ข. ได้

$$\alpha = \frac{\Delta\ell}{\ell_1\Delta\theta}$$

$$\Delta\ell = \alpha\ell_1\Delta\theta$$

จาก ค. ได้

$$\sqrt{\ell_1 + \Delta\ell} = \sqrt{\ell_1 + \alpha\ell_1\Delta\theta}$$

$$\approx \sqrt{\ell_1} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\Delta\theta\right)$$

แทนค่าผลจาก ข. และ ค. ลงใน $T + \Delta T$ จะได้

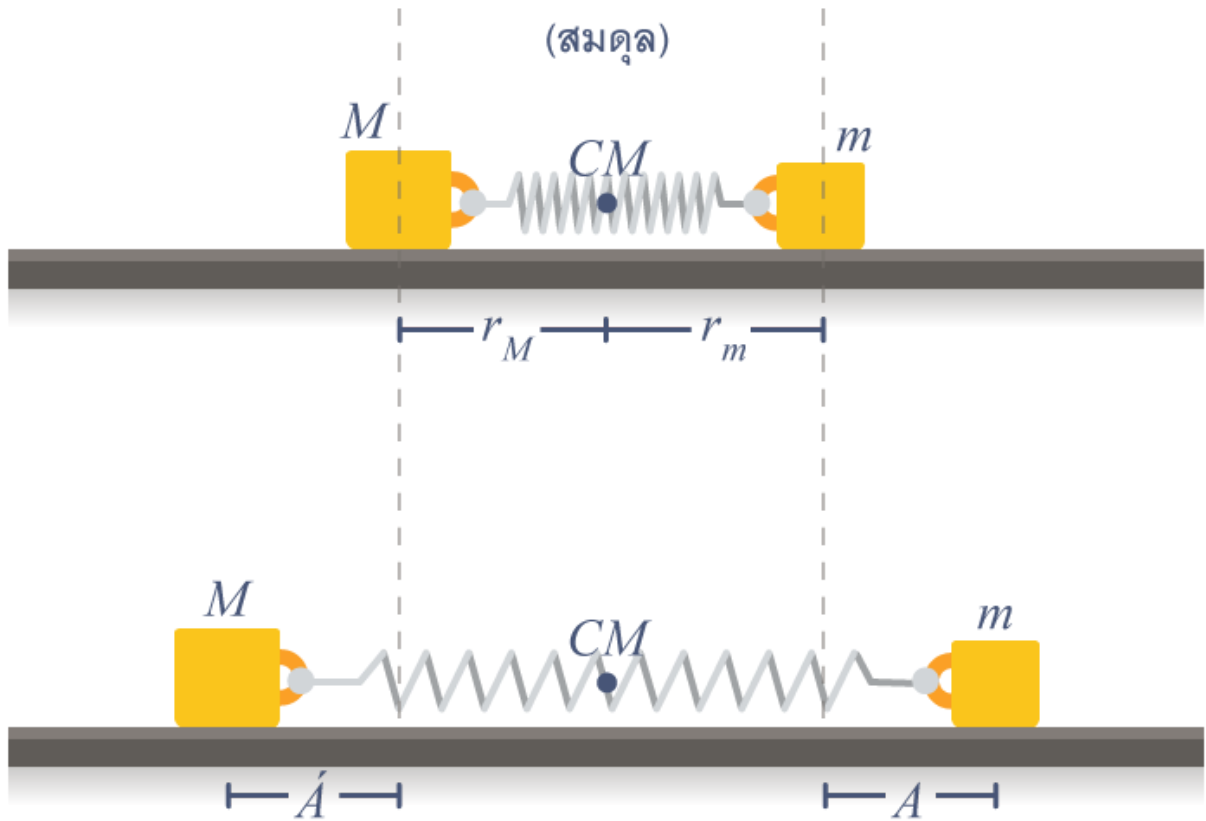
$$T + \Delta T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{\ell_1} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\Delta\theta\right)$$

$$\Delta T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \frac{\alpha}{2}\Delta\theta$$

$$\therefore \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\alpha\Delta\theta$$

ข้อที่ 2

ตอบ $\frac{m}{M}A$



เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำจุด CM ของระบบต้องไม่มีความเร่ง (ในที่นี้ คือ "อยู่กับที่" ไปเลย) ดังนั้นไม่ว่า M, m จะพยายามเคลื่อนที่ออกจากสมดุลอย่างไร จุด CM ของมันจะอยู่ที่เดิม :

ที่สมดุล

$$r_M M = r_m m$$

เมื่อขยับไปที่ Amplitude

$$(r_M + A)M = (r_m + A)m$$

จะได้

$$A M = A m \rightarrow A (\text{Amplitude ของ } M) = A \frac{m}{M}$$

ข้อที่ 3

ตอบ $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k} \frac{N}{N+n}}$

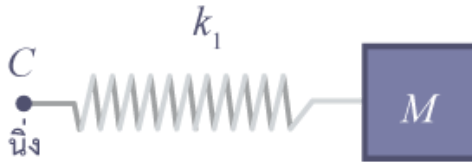
เนื่องจากสปริงทั้งเส้น สามารถมองว่าเป็นสปริง 2 ส่วน N วง + n วง ต่ออนุกรมกันได้ เราทราบว่าค่า K สปริงของวงเล็ก ๆ (1 วง) หาได้จาก

$$\frac{1}{k} = (N+n) \frac{1}{K}$$

$$K = (N+n)k$$

และสำหรับสปริงแค่ N วง

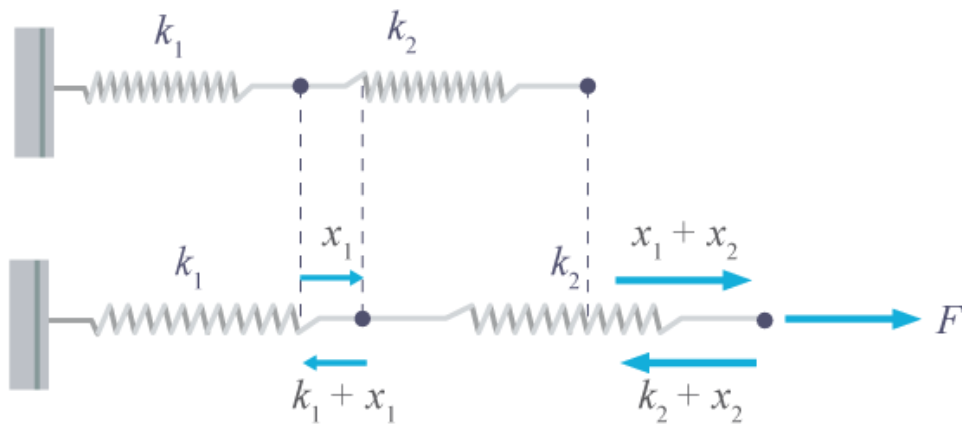
$$k_1 = \frac{K}{N} = \left(1 + \frac{n}{N}\right) \times k$$



คือมองแค่ว่า M เคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีสปริงแข็ง K ยึดกับจุด C (ซึ่งไม่นิ่ง) คาบการสั่น คือ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \left(1 + \frac{n}{N}\right)^{\frac{1}{2}}$$

NOTE : การต่ออนุกรมสปริง



มองว่า F ดึง k_{eq} ตัวเดียวจนยืดออกมา $x_1 + x_2$ ซึ่งแรง F นี้ ถ่ายทอดไปตามสปริงเบาทั้งเส้นเท่ากัน

$$\begin{aligned} x_{eq} &= x_1 + x_2 \\ F/k_{eq} &= F/k_1 + F/k_2 \\ \therefore 1/k_{eq} &= 1/k_1 + 1/k_2 \end{aligned}$$

ข้อที่ 4

กำหนดให้ ทิศไปทางขวาเป็นบวก

l คือ ความยาวธรรมชาติของสปริง

k คือ ค่าคงตัวสปริง

x_1, x_2, x_3 คือ ระยะที่ m ตัวที่ 1, 2, 3 เคลื่อนที่ตามแนวแกน X ขณะที่สปริงทั้งสองยืดออก ตามลำดับ สปริงตัวแรกจะยืดออกเท่ากับ

$$x_2 - x_1 - l$$

ระยะที่สปริงตัวที่สองยืดออกเท่ากับ

$$x_3 - x_2 l$$

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน

$$\sum \vec{F} = ma$$

สำหรับ m ตัวแรกถูกสปริงตัวแรกดึงไปทางขวา จะได้

$$m\ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1 - l) \dots (1)$$

สำหรับ m ตัวที่สองถูกสปริงตัวแรกดึงไปทางซ้ายและถูกสปริงตัวที่สองดึงไปทางขวา จะได้

$$m\ddot{x}_2 = +k(x_3 - x_2 - \ell) - k(x_2 - x_1 - \ell) \dots (2)$$

สำหรับ m ตัวที่สามถูกสปริงตัวที่สองดึงไปทางซ้าย จะได้

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2 - \ell) \dots (3)$$

เราสามารถแก้สมการได้โดย
นำ (3) - (1)

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_1) &= -k(x_3 - x_1 - 2\ell) \\ m \frac{d^2}{dt^2}(x_3 - x_1) &= -k(x_3 - x_1 - 2\ell) \\ \frac{d^2}{dt^2}(x_3 - x_1 - 2\ell) &= -\frac{k}{m}(x_3 - x_1 - 2\ell) \\ \therefore \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ความถี่พื้นฐานตัวแรก เท่ากับ

$$f_1 = \frac{m_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

นำ (3) - 2(2) + (1)

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_3 - 2\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) &= -3k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ m \frac{d^2}{dt^2}(x_3 - 2x_2 + x_1) &= -3k(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \frac{d^2}{dt^2}(x_3 - 2x_2 + x_1) &= -\frac{3k}{m}(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ \therefore \omega_2 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น สำหรับ ความถี่พื้นฐานตัวที่สอง เท่ากับ

$$f_2 = \frac{w_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

เพิ่มเติม

ความถี่ใน ที่นี้ คือความถี่ธรรมชาติของ mode การสั่น mode หนึ่ง ซึ่งมีความเป็นไปได้ว่า ในความจริงแล้ว มวลทั้งหมดมันจะสั่นหลาย mode ผสมกัน ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขตั้งต้นที่กำหนดให้แต่ละตัว การสั่นของมวลแต่ละก้อนเกิดจากผลรวมของทุก normal mode นั่นคือ เราสมมติว่า

$$x = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} + \dots + A_3 e^{i\omega_3 t}$$

ข้อที่ 5

ขั้นแรก : คิดเมื่อทั้งระบบอยู่ที่สมดุล ให้สปริงยึดจากความยาวธรรมชาติ x ให้จุดศูนย์กลางทรงกระบอกรวมเป็นจุดหมุน

$$\begin{aligned} \therefore \sum \tau &= 0 \\ kx \left(\frac{R}{2}\right) &= mgR \\ \therefore kx &= 2mg \end{aligned}$$

.....
ขั้นสอง : คิดเมื่อตั้งมวล m ลงมาเป็นมุมเล็กๆ θ และ ยาวจากระยะสมดุลในขั้นแรกเป็น A (ยึดจากความยาวธรรมชาติ $x + A$)
ดังนั้น เราจึงประมาณได้ว่า

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{A}{R/2}$$

$$A = \frac{\theta R}{2}$$

$$\therefore \sum \tau = I\ddot{\theta}$$

$$mgR - k(x + A)\frac{R}{2} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta}$$

$$mg - mg - \frac{k\theta R}{4} = \left(\frac{1}{2}MR + mR\right)\ddot{\theta}$$

$$-k\theta = (2M + 4m)\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{k}{(2M + 4m)}\theta$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{k}{2M + 4m}\theta$$

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2(M + 2m)}{k}}$$

ข้อที่ 6

ให้เชือกมีความตึง T และวัตถุสมดุลงจะได้ว่า

$$T \sin \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

$$T \cos \theta = mg$$

$$\tan \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg}$$

จาก

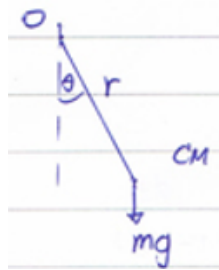
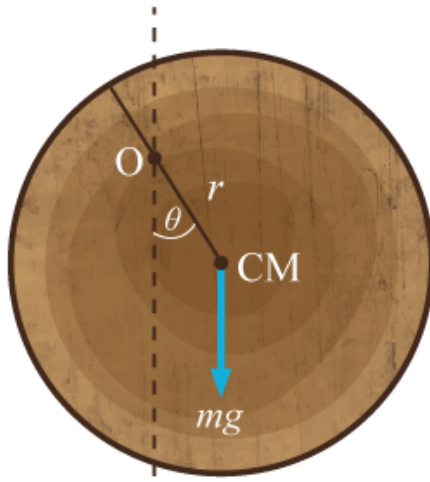
$$\tan \theta \approx \sin \theta$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg} \approx \frac{x}{2L}$$

ได้ว่า

$$x = 2L \left(\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2 mg} \right)^{\frac{1}{3}}$$

ข้อที่ 7



ให้ m เป็นมวลของแผ่นกลม
 r เป็นระยะทางจากจุด O ถึงจุด CM

$$-mgr \sin \theta = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mr^2 \right) \ddot{\theta}$$

โดย $\sin \theta = \theta$ เมื่อ θ เล็กมากๆ
 จะได้

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{-mgr}{\frac{1}{2}mR^2 + mr^2} \theta \\ &= \frac{-gr}{\frac{1}{2}R^2 + r^2} \theta \end{aligned}$$

คาบของการแกว่ง

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + r^2}{gr}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{R^2}{2r} + r} \end{aligned}$$

สังเกตว่าคาบจะน้อยสุดเมื่อ $\frac{R^2}{2r} + r$ มีค่าน้อยสุด

หาค่า r จาก

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{R^2}{2r} + r \right) &= 0 \\ \frac{R^2}{2} (-1)r^{-2} + 1 &= 0 \\ 1 &= \frac{R^2}{2r^2} \\ r &= \frac{R}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ทดสอบว่า $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ เป็นค่าที่ทำให้ $\frac{R^2}{2r} + r$ มีค่าน้อยสุด

โดยการหาอนุพันธ์อันดับสองของ $\frac{R^2}{2r} + r$

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{R^2}{2r} + r \right) = \frac{R^2}{r^3}$$

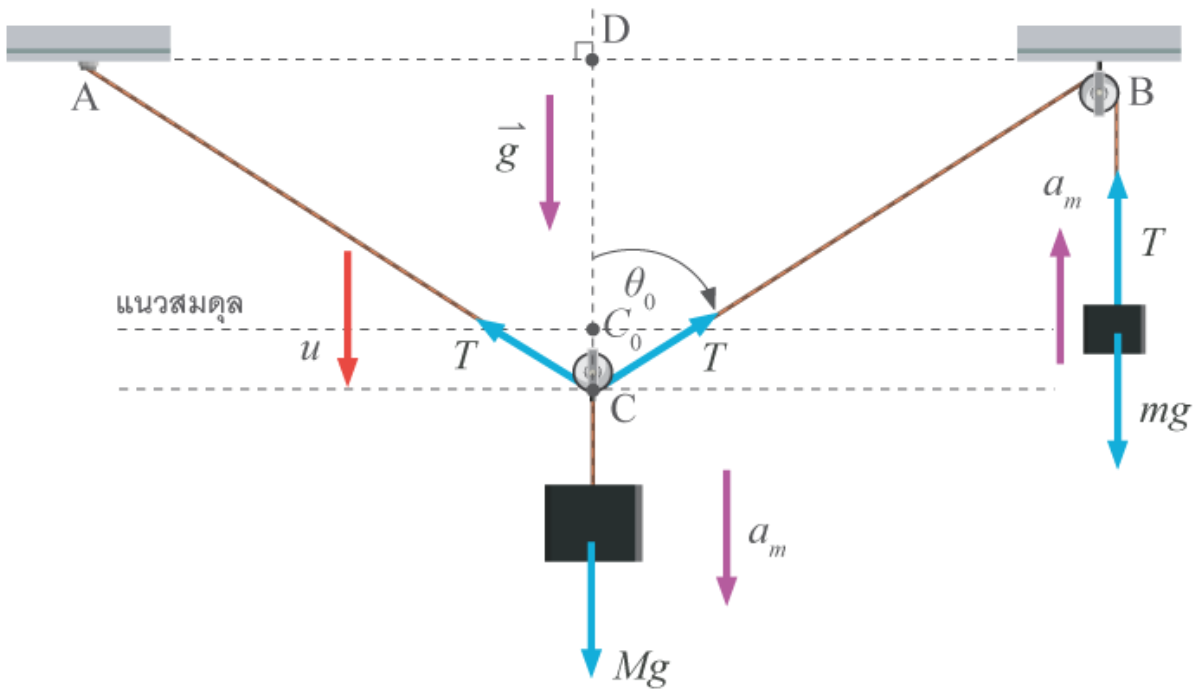
มีค่าเป็นบวก แสดงว่า $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ให้ค่าน้อยสุดจริง

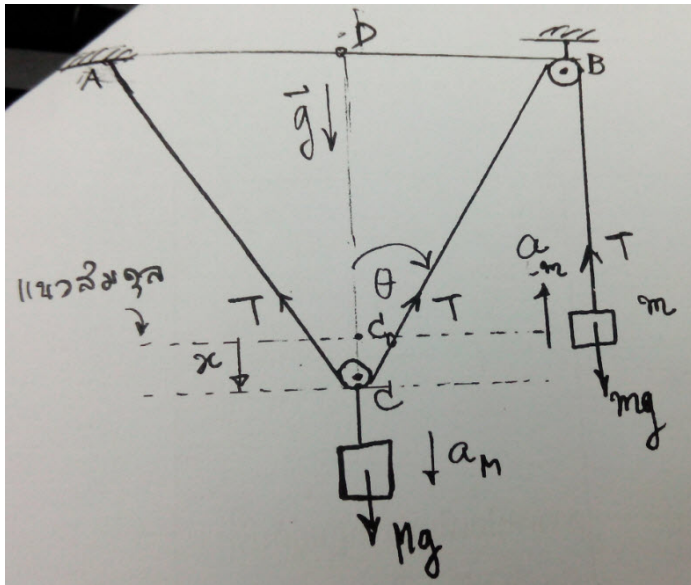
ดังนั้น คานจะน้อยสุดเมื่อ $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$$T_{\min} = 2^{5/4} \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

ข้อที่ 8

ตอบ $T = 2\pi \left(\frac{Ml}{2mg \sin^2 \theta_0} \right)^{1/2}$





ที่สมดุล

$$\theta = \theta_0, DC_0 = l \cos \theta_0, T_0 = mg$$

และ

$$Mg = 2T_0 \cos \theta_0$$

$$\therefore Mg = 2mg \cos \theta_0$$

เขียน equation of motion ของมวล M ได้

$$Ma_M = Mg - 2T \cos \theta$$

ของ m ได้

$$ma_n = T - mg$$

ถ้าสมมติว่า

$$x \ll l \rightarrow a \ll g \rightarrow T \approx mg$$

ได้

$$Ma_M \approx Mg - 2mg \cos \theta$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (BC)^2 &= (l \cos \theta_0 + x)^2 + (DB)^2 \\ &= (l \cos \theta_0)^2 + (DB)^2 + (2l \cos \theta_0)x \\ &= l^2 + (2l \cos \theta_0)x \\ &= l^2 \left(1 + \frac{2 \cos \theta_0 x}{l} \right) \\ \therefore BC &\approx l \left(1 + \frac{2 \cos \theta_0 x}{l} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx l + \cos \theta_0 x \end{aligned}$$

$$;(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha \text{ เมื่อ } \alpha \ll 1$$

และ

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{DC}{BC} \\
&\approx \frac{l \cos \theta_0 + x}{l + \cos \theta_0 x} \\
&\approx (\cos \theta_0) \left(1 + \frac{x}{l \cos \theta_0} \right) \left(1 - \frac{\cos \theta_0 x}{l} \right) \\
&\approx (\cos \theta_0) \left(1 + \frac{x}{l \cos \theta_0} - \frac{x \cos \theta_0}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \\
&\approx (\cos \theta_0) \left(1 + \frac{x \sin^2 \theta_0}{l \cos \theta_0} \right)
\end{aligned}$$

ได้

$$\begin{aligned}
Ma_M &\approx Mg - 2mg \left((\cos \theta_0) \left(1 + \frac{x \sin^2 \theta_0}{l \cos \theta_0} \right) \right) \\
M \frac{d^2 x}{dt^2} &\approx - \frac{2mg \sin^2 \theta_0}{l} x
\end{aligned}$$

∴ คาบการสั่น

$$T = 2\pi \left(\frac{Ml}{2mg \sin^2 \theta_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ข้อที่ 9

1) จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะได้ว่า

$$mg(h+1) = \frac{1}{2}kx^2 + mg(l-x)$$

เมื่อ x คือระยะที่หดมากที่สุดของสปริงนี้
แก้สมการแล้วใช้ค่าบวก (สปริงไม่ทะลุพื้นลงไป) ได้

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2 g^2 + 2mghk}}{k}$$

2) พอสมดุลแล้วจะได้ว่า $k\psi = mg$ หรือ $\psi = \frac{mg}{k}$ ดังนั้นตำแหน่งสมดุลสูงจากพื้น $l - \frac{mg}{k}$

3) โจทย์กำหนดว่า มวลจะติดอยู่กับปลายสปริงตลอดตั้งนั้น ให้ H เป็นความสูงสูงสุดที่ขึ้นไปได้ จากกฎการอนุรักษ์พลังงานได้
ว่า แก้สมการแล้วพิจารณาค่าบวกได้ว่า

$$\begin{aligned}
mg(h+l) &= mgH + \frac{1}{2}k(H-1)^2 \\
H &= l - \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2 g^2 + 2mghk}}{k}
\end{aligned}$$

4) วัตถุจะมีอัตราเร็วสูงสุดเมื่อผ่านจุดสมดุล จากกฎการอนุรักษ์พลังงานจึงได้ว่า

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + mg\left(l - \frac{mg}{k}\right) = mg(h + l)$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg^2}{k} + 2gh}$$

5) จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน เมื่อวัตถุอยู่สูง y จากตำแหน่งสมดุล จะได้ว่า

$$-k\left(y - \frac{mg}{k}\right) - mg = m\frac{d^2}{dt^2}y$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y = -\left(\frac{k}{m}\right)y$$

จาก สมการด้านบน จะเห็นว่าความเร่งแปรผันตรงกับการกระจัดแต่มีทิศตรงข้าม เป็นเงื่อนไขของ SHM ดังนั้นนี่เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย ได้คำตอบของสมการเป็น

$$y = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

พิจารณาว่าที่ $t = 0$ จะพบว่า

$$y = \frac{mg}{k}$$

และ

$$v = \frac{d}{dt}y = \sqrt{2gh}$$

(จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน) จะได้ว่า

$$A = \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k}$$

และ

$$\phi = \arcsin\left(\frac{mg}{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}\right)$$

ดังนั้นตำแหน่ง y ที่เวลาใดๆเป็นไปตามสมการ

$$y(t) = \left[\frac{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k}\right] \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin\left(\frac{mg}{\sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}\right)\right]$$

6) การสั่นนี้มีคาบ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$